Relaxation convexe pour la planification du pompage dans un réseau branché de distribution d'eau

Gratien Bonvin[1], Sophie Demassey[1]

CMA, Mines ParisTech, PSL Research University,
BP 207, F-06902 Sophia Antipolis, France
{gratien.bonvin,sophie.demassey}@mines-paristech.fr

Mots-clés : *planification du pompage, programmation non-linéaire en nombres entiers, relaxation convexe.*

1 Introduction

Nous traitons du problème de planification du pompage dans un réseau d'eau branché, muni d'une station de pompage à la source permettant d'élever l'eau à des châteaux d'eau géographiquement distribués. Cette topologie est caractéristique, en particulier mais pas exclusivement, des réseaux de distribution d'eau potable en zone rurale.

Le stockage (de l'eau et de l'énergie) au niveau des châteaux d'eau permet de découpler dans le temps l'activation des pompes (pour remplir les châteaux d'eau) de la consommation d'eau (acheminée ensuite par des réseaux gravitaires jusqu'aux clients). Ce découplage permet de dégager un gain opérationnel financier important en décalant le pompage quand le tarif de l'électricité est au plus bas, typiquement durant les heures creuses.

Le *Pump Scheduling Problem* consiste à déterminer un plan journalier d'allumage des pompes à moindre coût étant donnés des profils variables de demande en eau et du tarif électrique. Il est généralement formulé comme un programme non-convexe en nombres entiers [2]. Nous proposons d'exploiter les spécificités du type de réseaux considéré (pompes centralisées, graphe sans circuit et sans flot sortant aux jonctions internes, valve de réduction de débit à chaque château d'eau) pour dériver une relaxation quadratique convexe et une heuristique de reconstruction de solutions réalisables, optimales sous conditions, à partir des solutions relâchées. Cette étude est à paraître dans [4].

2 Réseau et modèle

Le réseau forme une arborescence (J, L) reliant la station de pompage à la racine $s \in J$, aux châteaux d'eau aux feuilles $J_T \subseteq J$, précédés chacun d'une valve $L_V \subseteq L$. La station de pompage se compose d'un ensemble K de pompes acheminant l'eau à s depuis une source r.

À chaque château d'eau $j \in J_T$, sont associés : un volume minimal $V_j^{\min}$ et maximal $V_j^{\max}$, un volume initial V_j^0 et une demande $D_{jt} \geq 0$ agrégée des consommateurs finaux alimentés depuis j sur chaque pas de temps t (ici une heure) de l'horizon de planification T (ici une journée). Pour acheminer l'eau depuis la source r, dont la capacité est considérée infinie et dont l'élévation H_r est inférieure aux autres points du réseau, la pression de l'eau doit être élevée mécaniquement au moyen des pompes, en tenant compte des pertes de charge subies dans les canalisations. Les pertes de charges sur une canalisation $(i, j) \in L_P$ et la puissance hydraulique délivrée par une pompe $k \in K$ peuvent être fidèlement approximées par des fonctions quadratiques du débit [1, 2], notées respectivement ici Φ_{ij} et Ψ_k. Une fonction linéaire du débit Γ_k fournit une bonne estimation de la consommation électrique d'une pompe k [3].

Les décisions de planification du pompage portent donc, à chaque pas de temps, sur le sous-ensemble de pompes à allumer ($x_{kt} = 1$ si la pompe k est allumée au temps t, et $x_{kt} = 0$ sinon) et le débit (flot) d'eau à acheminer ($q_{lt} \geq 0, \forall l \in L \cup K$) de sorte que les charges hydrauliques en chaque point du réseau ($h_{jt} \geq H_j, \forall j \in J$) satisfont notamment les équations de perte de charge $h_{it} - h_{jt} = \Phi_{ij}(q_{ijt})$ sur les canalisations $(i,j) \in L_p$ et les équations hydrauliques $h_{st} - H_r = \Psi_k(q_{kt})$ sur les pompes actives $k \in K, x_{kt} = 1$. Le problème peut se formuler ainsi par un programme en variables mixtes à contraintes quadratiques et objectif linéaire. Les équations couplantes du débit et de la pression rendent le modèle non-convexe.

2.1 Relaxation Convexe

Pour envisager l'optimisation globale de ce problème en un temps raisonnable, nous proposons de relâcher ces équations en inégalités, $h_{it} - h_{jt} \geq \Phi_{ij}(q_{ijt})$ et $h_{st} - H_r \leq \Psi_k(q_{kt}) + M(1 - x_{kt})$, rendant alors le modèle (plus exactement, sa relaxation continue) convexe. Cette relaxation autorise une pression hydraulique artificiellement plus basse à chaque jonction du réseau. Cependant, la présence d'une valve de réduction de pression avant chaque château d'eau (i.e. $h_{it} \geq h_{jt}, \forall (i,j) \in L_V$) va permettre de dissiper le supplément réel de pression (écart positif à l'égalité) accumulé le long du chemin (unique) depuis la source jusqu'au château d'eau. Cette propriété, propre à ce type de réseau, nous permet d'établir la proposition suivante :

Proposition 1 *À chaque solution du modèle relâché, correspond une solution réalisable du modèle original telle que la différence de coût est bornée supérieurement par un facteur de* $\max_{k \in K} P_k - \min_{k \in K} P_k$*, où* P_k *est la pente de la fonction linéaire* Γ_k*.*

La preuve consiste à construire une solution où le flot total et l'allumage des pompes est conservé à chaque pas de temps, mais où le flot q' est réparti équitablement entre les pompes actives de sorte que $\Psi_k(q'_{kt}) = \Psi_{k'}(q'_{k't})\ \forall k, k' \in K, x_{kt} = x_{k't} = 1$. On note que l'augmentation du coût découle de cette redistribution. La pression à la sortie de la station h'_{st} est ainsi augmentée à $\Psi_k(q_{kt}) + H_r$. L'augmentation de pression est alors propagée le long de chaque chemin de l'arborescence par l'expression récursive : $h'_{jt} = h'_{it} - \Phi_{ij}(q_{ijt})$.

3 Évaluation

L'approche est validée expérimentalement sur un réseau réel de 6 pompes et 16 châteaux d'eau et des données historiques sur 3 années. La relaxation, résolue par l'algorithme par défaut de Gurobi 6.0, et l'heuristique retournent une solution réalisable à moins de 3% de l'optimum en moins d'une minute. Il faut parfois plus de 2h à AlphaECP ou Baron pour trouver une solution à 20% de l'optimum au modèle non-convexe. Comparée à la stratégie de conduite actuelle du réseau, notre approche permet des économies financières de l'ordre de 17% en moyenne et énergétiques de l'ordre de 13%. Enfin, l'approche est robuste à la variabilité intra-journalière des tarifs de l'électricité et offre ainsi l'opportunité d'appliquer des mécanismes effectifs de demand-response dans ces réseaux présents sur tout le territoire.

Références

[1] B. J. Eck, M. Mevissen, Valve placement in water networks : Mixed-integer non-linear optimization with quadratic pipe friction, IBM Research Report (September 2012).

[2] C. D'Ambrosio, A. Lodi, S. Wiese, C. Bragalli, Mathematical programming techniques in water network optimization, European J. of Operational Research 243 (3) (2015) 774 – 788.

[3] B. Geißler, O. Kolb, J. Lang, G. Leugering, A. Martin, A. Morsi, Mixed integer linear models for the optimization of dynamical transport networks, Mathematical Methods of Operations Research 73 (3) (2011) 339–362.

[4] G. Bonvin, A. Samperio, C. Le Pape, V. Mazauric, S. Demassey, N. Maïzi, A convex mathematical program for pump scheduling in a class of branched water networks, Applied Energy, `doi:10.1016/j.apenergy.2015.12.090`.