

Évaluation de performance en réception d'appels d'urgence : débits asymptotiques dans un réseau de Pétri avec priorités

Xavier Allamigeon¹, Vianney Boeuf^{2,1,3}, Stéphane Gaubert¹

¹ INRIA and École polytechnique, CNRS

² École des Ponts ParisTech

³ Brigade de sapeurs-pompiers de Paris

Firstname.Lastname@inria.fr

Mots-clés : *Algèbre max-plus, Algèbre tropicale, Réseaux de Pétri, Systèmes dynamiques affines par morceaux, Processus de décision semi-Markovien, Services médicaux d'urgence, Premiers secours.*

1 Motivations

Ce travail a pour origine une collaboration avec la Préfecture de Police de Paris (PP) et la Brigade de sapeurs-pompiers de Paris (BSPP).¹ La PP a engagé une réforme du traitement des appels d'urgence à Paris et en petite couronne pour les numéros d'appel 17, 18 et 112. Celle-ci prévoit deux innovations : le traitement unifié des appels entrants des différents numéros d'urgence, et une procédure bi-niveau (filtrage puis instruction), avec un traitement prioritaire des appels très urgents. On cherche à dimensionner les différents effectifs de manière à garantir un bon fonctionnement de la réception d'appels d'urgence, en évitant tout engorgement.

2 Modélisation de la dynamique des appels d'urgence

Afin de modéliser la priorité donnée aux appels très urgents, on introduit une classe de réseaux de Pétri (RDP) temporisés qui étend les RDP à choix libres, plus classiques, en autorisant des places avec concurrence. Pour ces places, le routage en aval est décrit par des priorités. On modélise le comportement du réseau par des fonctions compteurs. Ce sont des fonctions croissantes, constantes par morceaux, continues à droite, qui mesurent les nombres cumulés de tirs de transition ou d'entrées de jetons dans les places.

Théorème 1 *Le comportement au plus tôt d'un réseau de Pétri à choix libres ou à routages par priorité est décrit par un système dynamique affine par morceaux, qui est l'analogue tropical d'un système dynamique rationnel sans soustraction.*

Le terme « tropical » renvoie ici à l'algèbre tropicale, ou min-plus. La modélisation de la dynamique d'un réseau de Pétri par des équations aux compteurs remonte aux années 80 pour les graphes d'événements et aux années 90 pour les réseaux de Pétri à choix libres ou avec routage par préselection [2]. La nouveauté est ici le traitement des priorités. On s'appuie pour cela sur le travail antérieur [3], où des dynamiques rationnelles tropicales apparaissaient déjà dans un modèle particulier de trafic routier. L'opérateur décrivant la dynamique n'est autre qu'un opérateur de programmation dynamique de processus de décision semi-Markovien, mais avec des probabilités *négligables*.

1. Les auteurs remercient Régis Reboul (PP) et Stéphane Raclot (BSPP) pour les échanges précieux au long de ce travail.

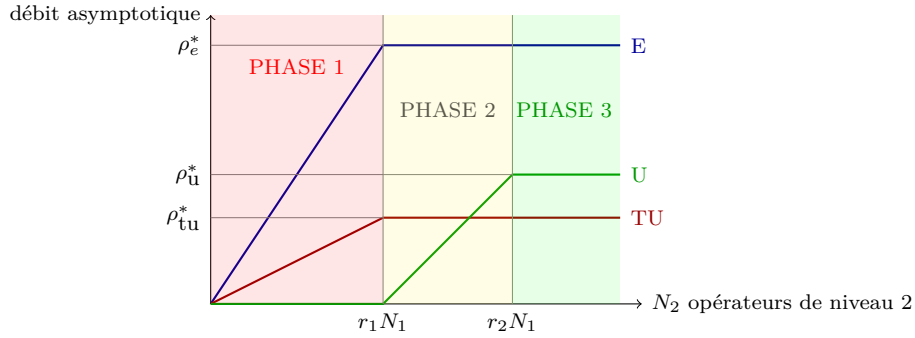


FIG. 1 – Débits asymptotiques du centre de réception des appels d’urgence pour les appels entrants (E), les appels urgents (U) et les appels très urgents (TU), en fonction des effectifs en opérateurs.

3 Comportement asymptotique

On cherche à déterminer analytiquement les débits asymptotiques (nombre d’appels de type donné traités par unité de temps). Pour cela, on se place en approximation fluide et on cherche des solutions stationnaires sous la forme de fonctions compteurs « ultimement affines ». Calculer ces solutions revient à résoudre un système affine par morceaux (déterminer des points d’une variété tropicale), ce que nous faisons par un algorithme énumérant les politiques (exponentiel en le nombre d’équations). La méthode s’apparente au calcul du gain moyen en horizon infini dans un système de décision semi-Markovien. Alors que pour un réseau de Pétri à choix libres avec présélection fluide, toute exécution converge vers une exécution périodique dont le débit coïncide avec celui de toutes les solutions stationnaires, lorsque l’on autorise les règles de priorité, le débit associé aux solutions stationnaires peut différer du débit associé à certaines conditions initiales. Ce phénomène, lié à l’absence de monotonie, apparaît lorsque certaines relations arithmétiques entre les temps de séjour sont satisfaites.

4 Application au problème de réception des appels d’urgence

Appliqués à notre modèle de réception des appels d’urgence, les calculs des débits fluides asymptotiques, selon la méthode évoquée précédemment, permettent d’obtenir des prédictions analytiques des débits en fonction du nombre d’opérateurs des deux niveaux de réception des appels, noté N_1 et N_2 , respectivement, comme illustré en figure 1. On discerne trois phases, dont les frontières sont exprimées analytiquement en fonction des paramètres du système. Dans la phase 3, aucun appel n’est perdu. Une recommandation opérationnelle est donc de maintenir le ratio N_2/N_1 supérieur à un seuil r_2 que l’on sait déterminer. Les simulations, menées avec des temps de séjour aléatoires, mettent en évidence des débits asymptotiques proches de ceux calculés analytiquement et confirment le comportement en trois phases. Un compte-rendu détaillé d’une partie de ces résultats peut être trouvé dans [1].

Références

- [1] Allamigeon X., Bœuf V., and Gaubert S. : Performance evaluation of an emergency call center : tropical polynomial systems applied to timed Petri nets. In *FORMATS’15*, volume 9268 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer. 2015. arxiv :1508.06162.
- [2] Cohen, G., Gaubert, S., Quadrat, J. : Algebraic system analysis of timed Petri nets. In Gunawardena, J., ed. : *Idempotency*. Publications of the Isaac Newton Institute. Cambridge University Press (1998) pp. 145-170
- [3] Farhi, N., Goursat, M., Quadrat, J.P. : Piecewise linear concave dynamical systems appearing in the microscopic traffic modeling. *Linear Algebra and Appl.* (2011)